GUÍA: Análisis Complejo I — Curso 2011-12

1. Presentación

En esta asignatura, troncal de 6 créditos se continua con el estudio de las funciones complejas de variable compleja iniciado en la asignatura *Introducción al Análisis Complejo*.

2. Objetivos

- Estudio de las propiedades de las funciones analíticas como transformaciones del plano complejo.
- Estudio detallado de las sucesiones de funciones holomorfas y de las familias normales como herramienta para establecer el teorema de Riemann sobre representación conforme.
- Aplicación de la teoría de funciones analíticas al estudio de las funciones armónicas de dos variables y en particular a solución del problema de Dirichlet en el Disco.
- Aplicación de procedimientos especiales de representación de funciones holomorfas y meromorfas para el estudio de funciones clásicas como la función Γ de Euler y la función ζ de Riemann.

3. Conocimientos previos necesarios

La asignatura *Análisis Complejo* depende fuertemente de la teoría de funciones de variable compleja que se enseña en la asignatura de tercer curso *Introducción al Análisis Complejo* (troncal de 7.5 créditos), por lo que se recomienda que los alumnos la cursen inmediatamente después de ésta.

4. Conocimientos, habilidades y destrezas que debe adquirir el alumno

- Conocer las propiedades de las funciones analíticas que tienen repercusión en los problemas de representación conforme: Teoremas de la aplicación abierta, de la función inversa, del módulo máximo, y en especial el Lema de Schwarz.
- Resolver problemas concretos de transformaciones conformes: Cálculo de fórmulas para la transformación inversa y obtención de isomorfismos conformes ente abiertos concretos.
- Utilización de algún programa informático para visualizar transformaciones conformes.

- Estudiar las propiedades básicas de la topología natural en el espacio de las funciones holomorfas y conocer criterios sencillos para establecer que una familia de funciones holomorfas es normal.
- Conocer con detalle las ideas implícitas en la demostración del teorema de Riemann y las aplicaciones del teorema a la topología del plano (caracterización de los abiertos simplemente conexos).
- Aplicar los resultados sobre funciones analíticas y representación conforme al estudio de las funciones armónicas de dos variables y a la solución del problema de Dirichlet en abiertos sencillos.
- Conocer las técnicas de representación de funciones concretas mediante productos infinitos, desarrollos de Mittag-Leffler e integrales dependientes de un parámetro con el fin de profundizar en estudio de las funciones especiales clásicas (Γ de Euler y ζ de Riemann).
- El alumno deberá conocer y comprender las demostraciones de los resultados centrales de la teoría, adquirir destreza en su aplicación a situaciones concretas y en la resolución de problemas clásicos sobre sucesiones de funciones holomorfas, representación conforme, funciones armónicas y representación de funciones (mediante productos infinitos, desarrollos de Mittag-Leffler e integrales dependientes de un parámetro).

5. Contenidos

1. Funciones holomorfas dadas por series y productos

1. Desarrollos de Mittag-Leffler. Desarrollos en serie de funciones meromorfas. Desarrollos de Mittag-Leffler de las funciones $(\pi/\operatorname{sen}\pi z)^2$ y $\pi\cot g\,\pi z$.
2. Productos infinitos. Productos infinitos y factorización de funciones holomorfas. Representación de funciones mediante series, integrales y productos infinitos.
3. Funciones especiales. Función Gamma y función ζ de Riemmann.

2. Las funciones derivables como transformaciones

1. Teorema del módulo máximo. Inversión local de funciones holomorfas. Teorema de la aplicación abierta. Teoremas del módulo máximo. Lema de Schwarz.
2. Transformaciones conformes. Transformaciones conformes. Transformaciones de Möbius. Estudio de algunas transformaciones conformes particulares.
3. Familias normales, teorema de Riemann. Topología en el espacio de las funciones holomorfas. Familias normales. Teoremas de Montel y de Vitali. Teorema de Riemann. Aplicaciones.

3. Funciones armónicas

1. Funciones armónicas y problema de Dirichlet. Funciones armónicas, problema de Dirichlet en el disco. Sucesiones de funciones armónicas, solución general del problema de Dirichlet.
2. Desigualdades de Harnack. Fórmula de Jensen.

6. Metodología

La teoría se desarrollará mediante clases magistrales en pizarra. Los alumnos contarán con los apuntes del curso: se proyectaran los enunciados de los resultados presentados y las demostraciones se completarán en la pizarra. Para la parte de problemas se utilizarán hasta un máximo 10 de los bloques de 2 horas seguidas programadas en el horario. Se entregarán relaciones de problemas que se resolverán en las clases prácticas.

7. Criterios de evaluación

El alumno podrá obtener la nota máxima de la asignatura (10 puntos) en el examen final, que incluirá: teoría y cuestiones teóricas (3 puntos) problemas y cuestiones practicas (7 puntos). Además el alumno podrá obtener hasta 2 puntos extra durante el curso mediante notas obtenidas en un control y tests de respuesta múltiple: para esta nota añadida no se computarán los items (control o tests) que tengan una nota menor que 3. Para que la nota añadida se sume a la nota del examen final el alumno debe tener al menos 2 puntos en la parte de problemas y cuestiones prácticas del mismo.

Referencias

[1] . V. Ahlfors, *Complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1978, An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.

[2] . B. Conway, *Functions of one complex variable*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 11, Springer-Verlag, New York, 1978.

[3] . I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable. Vol. II*, Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[4] . Rudin, *Análisis real y complejo*, tercera ed., McGraw-Hill, 1988.

[5] . Feyel and A. de la Pradelle, *Ejercicios sobre las funciones analíticas*, Paraninfo, Madrid, 1980, Con soluciones. Translated from the French by Emilio Romero Ros.

[6] Lecciones de Análisis Complejo Apuntes en SUMA2004

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es